

Chapter 4



二維隨機變數及聯合機率分配

4.1 二維隨機變數

前章所討論的隨機變數皆以探討單一現象，即一維（one dimension）樣本空間為主，但在很多實際現象中，有時必須要探討二個或二個以上的現象，因此必須討論二維或多維隨機變數的機率分配函數的概念。本章以探討二維隨機變數為主。

一、聯合機率質量函數

(→)聯合機率質量函數之觀念：

設 X 與 Y 為二維間斷隨機變數，且兩隨機變數同時發生的機率以函數 $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ 表示，稱之為聯合機率質量函數（joint probability mass function；簡記j.p.m.f）。

定義1

設 (X, Y) 為二維間斷隨機變數，若函數 $f(x, y)$ 滿足下列條件

1. $f(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in R \times R$

2. $\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) = 1$

則稱 $f(x, y)$ 為 (X, Y) 之聯合機率質量函數，其中 $f(x, y)$ 表示 $X = x$, $Y = y$ 兩事件同時發生之機率，即 $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ 。



4-2 統計學（上）

在定義1中有時當兩隨機變數 X 與 Y 之變量較少時，可利用聯合機率表（見表4-1）來呈現，此種表示方法對於瞭解機率分配性質及計算某事件發生之機率甚為方便。

表4-1 聯合機率分配表

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	y_1		y_j		y_c	$f(x)$
x_1	$f(x_1, y_1)$		$f(x_1, y_j)$		$f(x_1, y_c)$	$f(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	$f(x_i, y_1)$		$f(x_i, y_j)$		$f(x_i, y_c)$	$f(x_i)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_r	$f(x_r, y_1)$		$f(x_r, y_j)$		$f(x_r, y_c)$	$f(x_r)$
$f(y)$	$f(y_1)$		$f(y_j)$		$f(y_c)$	1

(⇒)邊際與條件機率質量函數：

在聯合機率質量函數中，亦可分別求出兩個隨機變數 X 與 Y 之個別機率分配，稱之為邊際機率質量函數（marginal probability mass function），以及可求出已知 $X = x$ 的條件下， Y 的機率分配，稱之為條件機率質量函數（conditional probability mass function）。茲將其分別定義如下：

定義2

設 $f(x, y)$ 為二維隨機變數 (X, Y) 的聯合機率質量函數，則

$$f(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y)$$

$$f(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x, y)$$

分別稱為 X 與 Y 之個別邊際機率質量函數。



定義3

設 $f(x, y)$ 為二維隨機變數的聯合機率質量函數，若已知 $X = x$ 的條件下，則 Y 的條件機率質量函數定義為

$$f(y|x) = P(Y = y | X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f(x, y)}{f(x)}$$

同理， $Y = y$ 的條件下， X 的條件機率質量函數定義為

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)}$$

**Remark**

機率乘法公式：

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x)f(y|x) \\ &= f(y)f(x|y) \end{aligned}$$

例題 1

Let Y_1 and Y_2 be discrete random variables with bivariate probability mass (or density) function as

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} (y_1 + y_2)/9 & , y_1 = 0, 1, 2 \text{ and } y_2 = 0, 1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

- (1) Please find the marginal probability mass functions of Y_1 and Y_2 .
- (2) Please find the conditional probability mass functions of Y_1 given $Y_2 = y_2$ and Y_2 given $Y_1 = y_1$. (95淡江財金25%)

Sol:

$$\begin{aligned} (1) f(y_1) &= \sum_{y_2} f(y_1, y_2) = \sum_{y_2} \frac{y_1 + y_2}{9} \\ &= \frac{y_1 + 0}{9} + \frac{y_1 + 1}{9} = \frac{2y_1 + 1}{9} \quad , y_1 = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

4-4 統計學 (上)

$$\begin{aligned} f(y_2) &= \sum_{y_1} f(y_1, y_2) = \sum_{y_1} \frac{y_1 + y_2}{9} \\ &= \frac{y_2}{9} + \frac{1+y_2}{9} + \frac{2+y_2}{9} = \frac{3(1+y_2)}{9} = \frac{1+y_2}{3}, \quad y_2 = 0, 1 \end{aligned}$$

(2) 在 Y_2 已知下, Y_1 之條件機率質量函數為

$$f(y_1 | y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f(y_2)} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{9}}{\frac{1+y_2}{3}} = \frac{y_1 + y_2}{3(1+y_2)}, \quad y_1 = 0, 1, 2, y_2 = 0, 1$$

在 Y_1 已知下, Y_2 之條件機率質量函數為

$$f(y_2 | y_1) = \frac{f(y_1, y_2)}{f(y_1)} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{9}}{\frac{2y_2 + 1}{9}} = \frac{y_1 + y_2}{2y_2 + 1}, \quad y_2 = 0, 1, y_1 = 0, 1, 2$$

• 例題 2 •

Let $P(x) = \frac{1}{3}$, $x = 1, 2, 3$ and $P(y | x) = \frac{1}{4-x}$, $y = x, x+1, \dots, 3$

Find the probability mass function of Y . (100交大財金(乙)10%)

Sol:

(1) 因乘法公式知

$$P(x, y) = P(x) \cdot P(y | x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4-x} \right)$$

$$x = 1, 2, 3, \quad y = x, x+1, \dots, 3$$

即 (X, Y) 之聯合機率分配表為

$x \backslash y$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{3}$

$$\text{又 } P(Y=1) = P(X=1, Y=1) = \frac{1}{9}$$

$$P(Y=2) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

$$\begin{aligned} P(Y=3) &= P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=3) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{11}{18} \end{aligned}$$

故 Y 之機率質量函數為

y	1	2	3
$P(y)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{11}{18}$

• 例題 3 •

If the joint probability distribution of X and Y is given by:

$$f(x, y) = c(x^2 + y^2) \quad \text{for } x = -1, 0, 1, 3; \quad y = -1, 2, 3$$

(1) Find the value of c .

(2) Find $P(X+Y > 2)$.

(99政大財政10%)

Sol:

(1) 因 (X, Y) 之聯合機率分配表為

$x \backslash y$	-1	2	3	
-1	$2c$	$5c$	$10c$	
0	c	$4c$	$9c$	
1	$2c$	$5c$	$10c$	
3	$10c$	$13c$	$18c$	
				$89c$

$$\text{故知 } \sum_x \sum_y f(x, y) = 1 \Rightarrow 89c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{89}$$

$$(2) P(X+Y > 2) = P(X=0, Y=3) + P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3)$$

4-6 統計學（上）

$$\begin{aligned} &+P(X=3, Y=2)+P(X=3, Y=3) \\ &=\frac{9}{89}+\frac{5}{89}+\frac{10}{89}+\frac{13}{89}+\frac{18}{89}=\frac{55}{89} \end{aligned}$$

二、聯合機率密度函數

前節中所討論的隨機變數其變量皆為可數或可數無限個，即間斷型隨機變數，但很多實務現象其變量皆為連續型的，因此我們亦可以利用間斷隨機變數的觀念，來探討二維連續隨機變數之機率分配，稱為聯合機率密度函數（joint probability density function）。

📌 定義 4

設 (X, Y) 為二維連續隨機變數，且函數 $f(x, y)$ 滿足下列條件

1. $f(x, y) \geq 0, \quad \forall (x, y) \in R \times R$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

則稱 $f(x, y)$ 為二維隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數。



若 X 與 Y 為連續隨機變數，其聯合機率密度函數 $f(x, y)$ ，今有一事件定義為 $A = \{(X, Y) | a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d\}$ ，則事件 A 發生之機率以下式來表示，並以積分方式來求算，即

$$P(A) = P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

• 例題 4 •

Let Y_1 and Y_2 have the joint probability density function given by

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} k(1-y_2) & , 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

Find:

(1) k .