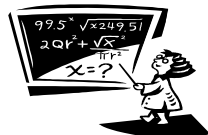


Chapter 2



微分學



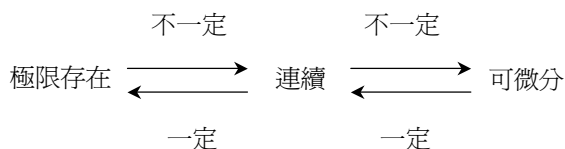
本章摘要

一、導函數表示方法

$$1. f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$2. f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

二、導函數、連續和極限的關係



三、微分的基本運算性質

$$1. y = f(x) = x^a, \text{ 則 } \frac{dy}{dx} = f'(x) = ax^{a-1}, \text{ 其中 } a \text{ 為任意常數}$$

$$2. y = [f(x) \pm g(x)], \text{ 則 } \frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$$

$$3. y = f(x) \cdot g(x), \text{ 則 } \frac{dy}{dx} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$4. y = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ 則 } \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

四、三角函數的微分

1. $(\sin x)' = \cos x$

2. $(\cos x)' = -\sin x$

3. $(\tan x)' = \sec^2 x$

4. $(\cot x)' = -\csc^2 x$

5. $(\sec x)' = \sec x \tan x$

6. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

五、鏈鎖律

◎若 $y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ，常見的鏈鎖律：

(1) $[e^{f(x)}]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

(2) $\{\ln[f(x)]\}' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

(3) $\{\sin[f(x)]\}' = \cos[f(x)] \cdot f'(x)$

(4) $\{\cos[f(x)]\}' = -\sin[f(x)] \cdot f'(x)$

六、對數的性質與微分

1. 對數的性質：

(1) $\ln 1 = 0$

(2) $\ln e = 1$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

2. 對數函數的運算：

(1) $\ln[f(x) \cdot g(x)] = \ln[f(x)] + \ln[g(x)]$

(2) $\ln\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \ln[f(x)] - \ln[g(x)]$

(3) $a \ln[f(x)] = \ln[f(x)]^a$ ，其中 a 為任意常數

3. 對數函數的微分運算性質為： $\{\ln[f(x)]\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

七、反函數的微分

◎若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 互為反函數，則「 $f(g(x)) = x$ 」：

(1) 微分關係式： $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

(2) 衍生： $g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}$

八、隱函數微分

若函數 $F(x, y) = 0$ ，則 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ ：

其中 F_x 為 $F(x, y)$ 式中將 y 視為常數，且對 x 偏微分。

F_y 為 $F(x, y)$ 式中將 x 視為常數，且對 y 偏微分。

九、雙曲線函數與反雙曲線函數

$$1. \text{定義：} \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

2. 雙曲線函數的基本性質：

$$(1) (\sinh x)' = \cosh x$$

$$(2) (\cosh x)' = \sinh x$$

$$(3) (\tanh x)' = \sec h^2 x$$

$$(4) (\coth x)' = -\csc h^2 x$$

$$(5) (\sec hx)' = -\sec hx \tanh x$$

$$(6) (\csc hx)' = -\csc hx \coth x$$

$$(7) \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$(8) \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

3. 反雙曲線函數的基本性質：

$$(1) \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(2) \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(3) \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (\tanh^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(4) \coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (\coth^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(5) \sec h^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad (\sec h^{-1} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$(6) \csc h^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}\right) \quad (\csc h^{-1} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

十、參數微分法

◎若 $x = f(t)$ ， $y = g(t)$ 則：

$$(1) y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$(2) y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dt}{dx} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]$$

十一、微分求近似值與相關變率

近似值 $= y + dy$ ，其中 y = 設定量、 dy = 微小變化量。

相關變率是利用各變數之間的關係函數，再將各變數對時間 t 微分，依題意代入已知數值，以求得相關變率。

十二、求切線——法向量法

若函數 $F(x, y)$ ，欲求通過函數上點 (a, b) 的切線，則該切線為：

$$[F_x(a, b)]x + [F_y(a, b)]y = [F_x(a, b)]a + [F_y(a, b)]b$$

十三、牛頓勘根法

◎牛頓勘根法的步驟：

(1) 選定適當的起始點 x_1 。

(2) 給定 x_1 的情形下得到 $y = f(x_1)$ ，做 $f(x)$ 的切線且通過點 $(x_1, f(x_1))$ ，則該切線為 $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ 。

(3) 令該切線 $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = 0$ ，求其與 x 軸的交點 x_2 ，則

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}。$$

(4) 同理可得 $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ ，如此持續逼近交點，可以得到一個通式：

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}。$$

十四、Rolle's 定理

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可微分，且 $f(a) = f(b)$ ，則至少存在一點 $c \in (a, b)$ ，使得